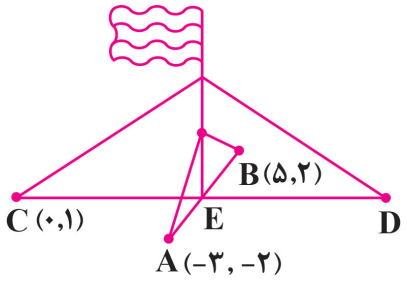
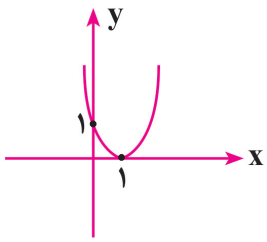
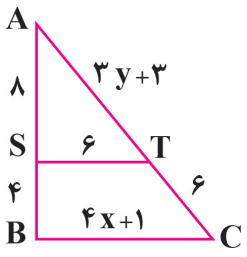
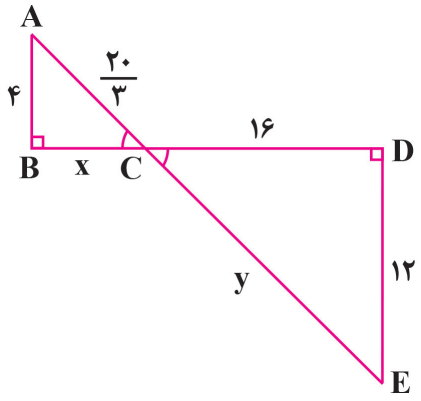
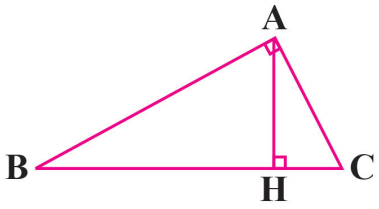
باسمه تعالی	سؤالات امتحان کلاس‌های یازدهم سؤالات امتحان پیشنهادی نیمسال اول	درس : **ریاضی (۲)** رشته : تجربی	تاریخ امتحان : دی ماه مدت امتحان : ۱۰۰ دقیقه	آزمون شماره **۳**

۱- نقاط (۰,۰) و (۴,۰) دو رأس از یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند . مختصات رأس سوم آن را بیابید . مسأله چند جواب دارد ؟	۲
۲- یک میله پرچم بزرگ ، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است به طوری که فاصله هر نقطه تا میله برابر است با فاصله نقطه مقابل آن تا میله . مختصات نقطه D را به دست آورید. 	۱/۵
۳- معادلات روبه‌رو را حل کنید : (ب $(۲x^۲-۱)^۲=۷+۶(۲x^۲-۱)$ (الف $k=\sqrt{۶k-۸}$	۲
۴- معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $۲-۳\sqrt{۲}$ و $۲+۳\sqrt{۲}$ باشد .	۱/۵
۵- معادله سهمی روبه‌رو را بنویسید : 	۱/۵
۶- معادله روبه‌رو را حل کنید : $\frac{۲x}{x-۳}+\frac{x+۱}{x+۴}=\frac{x-۱}{x-۳}$	۱/۵
۷- مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید . نیم‌سازهای دو زاویه این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آن‌ها را O بنامید . از نقطه O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید . به مرکز O و به شعاع OH دایره‌ای رسم کنید . اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند ؟ چرا ؟	۱
۸- در شکل روبه‌رو $ST\parallel BC$ ، مقادیر x و y را به دست آورید : 	۱
۹- نقیض گزاره‌های روبه‌رو را بنویسید : الف) $۴>۷$ ب) هیچ مثلثی با سه ضلع نابرابر وجود ندارد .	۱
۱۰- حکم کلی روبه‌رو را با یک مثال نقض رد کنید : «در هر مثلث میانه و عمودمنصف متناظر به هر ضلع برهم منطبق‌اند . »	۱
۱۱- عکس قضیه تالس را بنویسید و آن را ثابت کنید .	۱/۵

۱۲- الف) ثابت کنید دو مثلث متشابه‌اند . ب) x و y را به دست آورید.  	۱/۲۵
۱۳- در مثلث قائم‌الزاویه روبه‌رو $AB=۸$ و $AC=۶$. اندازه BC و AH را به دست آورید .  	۱
۱۴- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=-\frac{۱}{x}$ را رسم کنید .	۱
۱۵- ماکزیمم تابع $f(x)=-۲x^۲+۸x-۵$ را به دست آورید .	۱/۲۵

برای مطالعه بیشتر

جایزه آبل

جایزه‌ای است بین‌المللی که هر ساله توسط شاه نروژ به یک یا چند ریاضی‌دان که کار ارزنده‌ای در ریاضی انجام داده باشد، داده می‌شود. این جایزه که به افتخار ریاضیدان نروژی نیلس هنریک آبل(۱۸۲۹ - ۱۸۰۲) نامگذاری شده در سال ۲۰۰۱ توسط دولت نروژ بنیان‌گذاری شد جایزه مکملی برای جایزه هولبرگ است که در علوم انسانی داده می‌شود. جایزه نقدی آن ۶ میلیون کرون نروژ معادل ۶۰۰۰۰۰ یورو است. مراسم اعطای جایزه در آتریوم دانشکده حقوق دانشگاه اسلو، جایی که از سال ۱۹۴۷ تا ۱۹۸۹ در آن جایزه صلح نوبل داده می‌شد، برگزار می‌شود. هیئت مدیره جایزه یک سمپوزیوم آبل هم بنیانگذاری کرده‌اند که توسط انجمن ریاضیات نروژ اداره می‌شود.

تأسیس این جایزه اولین بار توسط ریاضیدان نروژی سوفوس لی(۱۸۴۲ - ۱۸۹۹) هنگامی که او مطلع شد تصمیم آلفرد نوبل بر دادن جایزه‌ای سالانه شامل ریاضیات نخواهد شد در سال ۱۸۹۹پیشنهاد شد.

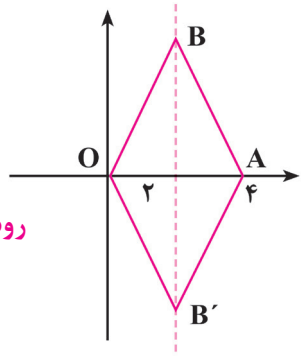
جمع	۲۰

کد ۱۱۰۶

۱- روش اول : فاصله دو نقطه ، $A(۴,۰)\ ,\ O(۰,۰)\ ,\ B(x,y)$ ، $=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$

$$AO=\sqrt{(۴-۰)^۲+(۰-۰)^۲}=۴ \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{(x-۰)^۲+(y-۰)^۲}=۴\\ \sqrt{(x-۴)^۲+(y-۰)^۲}=۴\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^۲+y^۲=۱۶\\ x^۲-۸x+y^۲=۰\end{cases}$$

$$-۸x+۱۶=۰ \Rightarrow x=۲ \quad ، \quad ۲^۲+y^۲=۱۶ \Rightarrow y=\pm ۲\sqrt{۳} \Rightarrow B(۲,۲\sqrt{۳}),B'(۲,-۲\sqrt{۳})$$



روش دوم : بدیهی است که رأس سوم مثلث روی عمودمنصف AO قرار دارد . یعنی :

در نتیجه : $B(۲,y)$ $x_B=x_{B'}=\frac{۰+۴}{۲}=۲$

$$BO=AO \Rightarrow \sqrt{(۲-۰)^۲+(y-۰)^۲}=۴ \Rightarrow y=\pm ۲\sqrt{۳}$$

۲- نقطه E هم وسط AB است و هم وسط CD :

$$x_E=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{x_C+x_D}{۲} \Rightarrow x_A+x_B=x_C+x_D$$

$$-۳+۵=۰+x_D \Rightarrow x_D=۲ \xrightarrow{\text{به دلیل مشابه}} y_A+y_B=y_C+y_D \Rightarrow -۲+۲=۱+y_D \Rightarrow y_D=-۱$$

۳-

الف) $k=\sqrt{۶k-۸} \Rightarrow k^۲=۶k-۸ \Rightarrow k^۲-۶k+۸=۰ \Rightarrow (k-۲)(x-۴)=۰$

$k=۲\ ,\ k=۴$ قابل قبول‌اند

ب) $۲x^۲-۱=t \Rightarrow t^۲=۷+۶t \Rightarrow t^۲-۶t-۷=۰ \xrightarrow{b=a+c} t=-۱,t=\frac{-c}{a}=۷$

$۲x^۲-۱=-۱ \Rightarrow x=۰$ ، $۲x^۲-۱=۷ \Rightarrow x=\pm ۲$

۴- کافی است که S و P را مشخص کرده و در رابطه $x^۲-Sx+P=۰$ قرار دهیم :

$$S=\alpha+\beta=۲+۳\sqrt{۲}+۲-۳\sqrt{۲}=۴$$

$$P=\alpha\cdot\beta=(۲+۳\sqrt{۲})(۲-۳\sqrt{۲})=-۱۴ \Rightarrow x^۲-۴x-۱۴=۰$$

۵- هرگاه یک سهمی بر محور طول‌ها در نقطه $x_۱$ مماس باشد ، معادله آن به صورت $y=a(x-x_۱)^۲$ است .

$$y=a(x-۱)^۲ \xrightarrow{(۰,۱)} ۱=a(۰-۱)^۲ \Rightarrow a=۱ \Rightarrow y=(x-۱)^۲$$

۶-

$$(x-۳)(x+۴)\left(\frac{۲x}{x-۳}+\frac{x+۱}{x+۴}=\frac{x-۱}{x-۳}\right) \Rightarrow ۲x(x+۴)+(x-۳)(x+۱)=(x+۴)(x-۱)$$

$$۲x^۲+۳x+۱=۰ \xrightarrow{b=a+c} x=-۱\ ,\ x=\frac{-c}{a}=-\frac{۱}{۲}$$

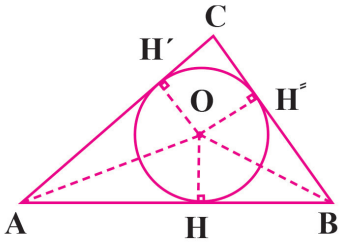
هر دو جواب قابل قبول‌اند ، زیرا مخرج کسر را صفر نمی‌کنند .

۷- هر نقطه واقع روی نیم‌ساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است .

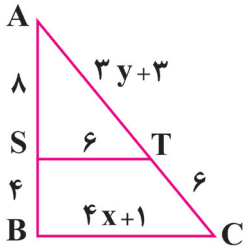
نقطه O محل تلاقی نیم‌سازهای زاویه‌های A و B است .

$$\left.\begin{matrix}OH=OH'\\ OH=OH''\end{matrix}\right\} \Rightarrow OH=OH'=OH''$$

هر سه ضلع مثلث بر این دایره مماس‌اند .



۸-



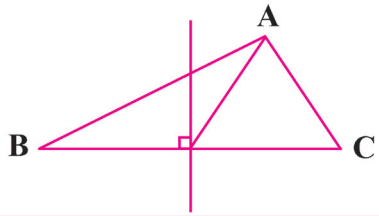
$$\frac{AS}{SB}=\frac{AT}{TC} \Rightarrow \frac{۸}{۴}=\frac{۳y+۳}{۶} \Rightarrow \frac{۲}{۱}=\frac{y+۱}{۲} \Rightarrow y=۳$$

$$\frac{AS}{AB}=\frac{ST}{BC} \Rightarrow \frac{۸}{۸+۴}=\frac{۶}{۴x+۱} \Rightarrow \frac{۱}{۳}=\frac{۳}{۴x+۱} \Rightarrow x=۲$$

۹- الف) چنین نیست که $۴ > ۷$ یا $۴ < ۷$

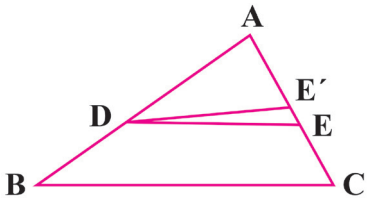
ب) چنین نیست که هیچ مثلثی با سه ضلع نابرابر وجود نداشته باشد یا مثلثی وجود داردکه سه ضلع آن نابرابر است .

۱۰- کافی است مثلثی رسم کنیم که عمودمنصف و میانه یک ضلع آن بر هم منطبق نباشند .



۱۱- اگر مانند شکل روبه‌رو در مثلث ABC داشته باشیم : $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ ، آن‌گاه : $DE \parallel BC$

اثبات : با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم مسئله نادرست است. یعنی : $DE \not\parallel BC$



لذا از نقطه D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه‌ای مانند E' قطع کند . طبق قضیه تالس داریم : $\frac{AD}{DB}=\frac{AE'}{E'C}$.

با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت :

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AE'}{E'C} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AE}{AE+EC}=\frac{AE'}{AE'+E'C} \Rightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{AE'}{AC} \Rightarrow AE=AE'$$

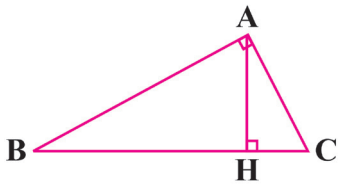
یعنی نقطه E' بر E منطبق است و لذا DE' همان DE است . این یک تناقض است زیرا : $DE \not\parallel BC$ و $DE' \parallel BC$

بنابراین از ابتدا فرض نادرست بودن حکم نادرست بوده است و حکم نمی‌تواند نادرست باشد یعنی : $DE \parallel BC$

۱۲- دو مثلث متشابه‌اند $\Rightarrow$ متقابل به رأس $\hat{C}_۱=\hat{C}_۲$ ، $\hat{B}=\hat{D}=۹۰^\circ$ (الف

ب) $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{CD}=\frac{AC}{EC} \Rightarrow \frac{۴}{۱۲}=\frac{x}{۱۶}=\frac{۲۰}{y} \Rightarrow x=\frac{۱۶}{۳}$, $y=۲۰$

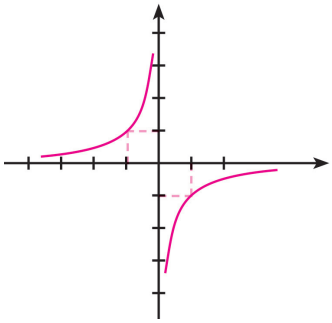
۱۳-



$$BC^۲=AB^۲+AC^۲ \Rightarrow BC^۲=۸^۲+۶^۲ \Rightarrow BC=۱۰$$

$$BC\times AH=AB\times AC \Rightarrow ۱۰AH=۸\times ۶ \Rightarrow AH=۴/۸$$

۱۴- x و $-\frac{۱}{x}$ نمی‌توانند صفر باشند ، بنابراین نمودار این تابع محورهای مختصات را قطع نمی‌کنند :



x	-۳	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۳
y	$\frac{۱}{۳}$	۱	۲	-۲	-۱	$\frac{-۱}{۳}$

۱۵- $a=-۲<۰$ ، پس نمودار تابع به صورت $\cap$ و درنتیجه دارای ماکزیمم است :

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۸}{۲(-۲)}=۲ \Rightarrow y=f(۲)=-۲\times ۲^۲+۸\times ۲-۵=۳$$